ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

ARTÍCULO

Reflexiones de futuros profesores sobre la implementación de la modelización matemática en el retorno a la enseñanza presencial

Future teachers' reflections on the implementation of mathematical modelling when returning to face-to-face teaching

Carlos **Ledezma***

ORCID iD 0000-0001-9274-7619

Alicia **Sánchez****

ORCID iD 0000-0001-6569-6828

Diana **Hidalgo-Moncada*****

ORCID iD 0000-0003-2573-9007

Resumen

La investigación en Didáctica de la Matemática ha realzado la importancia de incluir la modelización para la enseñanza de esta materia. En 2021, esta tendencia convivió con el retorno a la enseñanza presencial, suspendida por la pandemia de COVID-19. Dada esta situación, resulta relevante estudiar qué aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje relacionaron los futuros profesores con la modelización matemática en sus reflexiones sobre su inclusión durante la transición entre los contextos virtual y presencial de enseñanza. Para ello, se utilizó como referente teórico el constructo Criterios de Idoneidad Didáctica, propuesto por el Enfoque Ontosemiótico. Se trata de una investigación cualitativa de tipo naturalista, ya que no se interfirió en el Máster de Formación de Profesores de Matemática estudiado. Se realizó un análisis de contenido sobre 117 Trabajos Finales de Máster, elaborados durante el año académico 2020–2021, e implementados durante el retorno a la enseñanza presencial. Se destacan los siguientes resultados: (a) alrededor del 35% de los futuros profesores afirmaron que implementaron la modelización en sus unidades didácticas y reflexionaron sobre su inclusión; (b) en sus reflexiones, los futuros profesores valoraron positivamente la inclusión de la modelización con base en los criterios de idoneidad epistémico y ecológico; (c) el casi 65% de los futuros profesores no implementó la modelización, y se descarta que haya sido por falta de conocimientos sobre este proceso o de un contexto propicio para modelizar, sino porque priorizaron otros aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático, debido al retorno a la enseñanza presencial.

* Magíster en Didáctica de la Matemática por el Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (IMA PUCV). Doctorando del programa Didáctica de las Ciencias, las Lenguas, las Artes, y las Humanidades de la Universidad de Barcelona (UB), Barcelona, Cataluña, España. E-mail: cledezar25@alumnes.ub.edu.

** Doctora en Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática por la Universidad de Barcelona (UB). Profesora Asociada de la Universidad de Barcelona (UB), Barcelona, Cataluña, España. E-mail: asanchezb@ub.edu.

*** Máster en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada (UGR). Doctoranda del programa Didáctica de las Ciencias, las Lenguas, las Artes, y las Humanidades de la Universidad de Barcelona (UB), Barcelona, Cataluña, España. E-mail: dhidalmo7@alumnes.ub.edu.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

Palabras clave: Análisis de contenido. Criterios de idoneidad didáctica. Modelización matemática. Reflexión docente. Trabajo final de máster.

Abstract

Research in Didactics of Mathematics has highlighted the importance of including modelling for the teaching of this subject. In 2021, this trend coexisted with the return to face-to-face teaching, suspended by the COVID-19 pandemic. Given this situation, it is relevant to study which aspects of the teaching and learning process prospective teachers related to mathematical modelling in their reflections on its inclusion during the transition period between the virtual and face-to-face teaching contexts. To this end, we used the Didactic Suitability Criteria construct, proposed by the Onto-Semiotic Approach. This is qualitative research of a naturalistic type, since we did not interfere in the Master's Programme for Mathematics Teacher Education in study. We conducted a content analysis on 117 Master's Degree Final Projects submitted during the 2020–2021 academic year and implemented during the return to face-to-face teaching. We highlight the following results: (a) about 35% of the future teachers stated that they implemented modelling in their didactic units and reflected on its inclusion; (b) on their reflections, the future teachers positively assessed the inclusion of modelling based on the epistemic and ecological suitability criteria; (c) almost 65% of the future teachers did not implement modelling, and we rule out that it was due to a lack of knowledge about this process or of a favourable context for modelling, but because they prioritised other aspects of the mathematical teaching and learning process, due to the return to face-to-face teaching.

Keywords: Content analysis. Didactic suitability criteria. Master's degree final project. Mathematical modelling. Teacher reflection.

1 Introducción

Existe un amplio consenso sobre la importancia de desarrollar competencias que impliquen el uso de la matemática para resolver problemas del mundo real, entre las que se destaca la competencia en modelización matemática (Kaiser, 2020; Niss; Højgaard, 2019). Esta competencia se considera como un aspecto central para la resolución de problemas en la evaluación PISA (OECD, 2019), un proceso que trae consigo beneficios para el aprendizaje de la matemática (Blum, 2011), y como un elemento indispensable para educar a individuos competentes ante las necesidades y exigencias contemporáneas (Maass *et al*., 2022). Por lo tanto, para educar a estudiantes competentes en modelización, se requiere preparar a los profesores en el manejo de estrategias de enseñanza asociadas a su implementación en el aula (Blum; Borromeo Ferri, 2009).

En la literatura de las últimas décadas, se han reportado diversos estudios sobre el rol de la modelización en la educación de profesores de matemática, abordando la enseñanza y aprendizaje de este proceso (véase más detalles en la subsección 2.2). Si bien tales estudios se encuentran en consonancia con la postura de Maaß (2007) de que no sólo basta con educar a los profesores en modelización, sino que también deben experimentarla, el que se reporta en este artículo centra su atención en la reflexión de futuros profesores sobre la inclusión de este proceso en sus Trabajos Finales de Máster (TFMs). En el contexto español, los futuros profesores deben obtener un grado de máster para impartir clases de matemática en educación

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

secundaria y bachillerato (estudiantes de 12–18 años). Para ello, deben elaborar un TFM, un trabajo original, autónomo, e individual, que permita al futuro profesor mostrar de forma integrada los contenidos formativos recibidos y las competencias generales del programa de máster. En el TFM, también deben reflexionar y profundizar en el análisis de su propia práctica, posibilitando proponer elementos para su mejora. Los futuros profesores elaboran su TFM luego de un periodo de prácticas en los centros educativos, donde deben diseñar e implementar una unidad didáctica que, dependiendo de ciertos factores (véase más detalles en la subsección 3.1), puede incluir el trabajo con modelización.

De este modo, dada la importancia de la modelización en el marco de la educación de profesores de matemática, se considera relevante profundizar en las reflexiones que futuros profesores realizaron sobre la inclusión de este proceso durante sus prácticas educativas en un contexto particular de implementación, luego de una situación de contingencia grave. Durante el año 2020, se vivieron momentos complejos a nivel mundial debido a la pandemia por COVID-19, lo cual afectó, entre muchos otros aspectos, a la educación en todos sus niveles (véase una discusión más amplia en Engelbrecht; Borba; Kaiser, 2023). Ante esta situación, los futuros profesores también vieron afectados sus procesos educativos, como en el caso de sus prácticas, muchas de las cuales se desarrollaron en un contexto de enseñanza virtual a causa de los confinamientos. No obstante, esta situación empezó a cambiar durante el año 2021 en que, paulatinamente, se produjo un retorno a la enseñanza presencial. En este contexto, este estudio pretende mostrar la importancia que tuvo (o no) la modelización para los futuros profesores después de una situación de contingencia grave, donde se priorizaron unos aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático que se consideraron relevantes y se relegaron a un segundo plano (o bien, suprimieron) otros aspectos. De esta manera, la gravedad de la contingencia puso de manifiesto la relevancia de la modelización para los futuros profesores.

Este estudio se plantea la pregunta: ¿qué aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje relacionaron futuros profesores de educación secundaria y bachillerato con la modelización matemática en sus reflexiones sobre su inclusión durante la transición entre los contextos virtual y presencial de enseñanza? Para responderla, se analizó la reflexión realizada por futuros profesores en sus TFMs sobre el diseño e implementación de sus unidades didácticas, las cuales implementaron en sus prácticas educativas desarrolladas durante la transición entre los contextos virtual y presencial de enseñanza debido a la pandemia por COVID-19. Esta reflexión se analizó utilizando el constructo Criterios de Idoneidad Didáctica, que es una de las herramientas propuestas por el Enfoque Ontosemiótico (Godino; Batanero; Font, 2007), y que fue la misma utilizada por los futuros profesores para pautar la reflexión

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

sobre su propia práctica educativa. Específicamente, el foco de análisis estuvo en los TFMs cuyas unidades didácticas incluyeron el trabajo con modelización.

2 Marco Teórico

2.1 Modelización Matemática

En términos generales, el proceso de modelización es entendido como una transición entre el *mundo real* y la *matemática* para la resolución de una situación-problema tomada desde la realidad. Este proceso no debe ser entendido en términos lineales pues, tanto el contexto del problema como los aspectos matemáticos involucrados en la situación, van afectando el modelo matemático definido (Blomhøj, 2004). En el plano teórico se han diseñado diferentes ciclos para explicar este proceso (Borromeo Ferri, 2006), así como también han emergido distintas perspectivas sobre su implementación en el aula (Abassian *et al*., 2020). Si bien estas diferencias se deben, principalmente, a la diversidad de posturas en torno a la modelización (Borromeo Ferri, 2013), los ciclos propuestos tienden a converger en ciertas fases afines (Geiger *et al*., 2018). Para este estudio se considera el ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiß (2007) (ver Figura 1), ello porque es el ciclo que se enseña a los futuros profesores en el programa de máster en que se desarrolló esta investigación. Junto con ello, se consideran algunos atributos consensuados que caracterizan el trabajo con modelización en el aula.

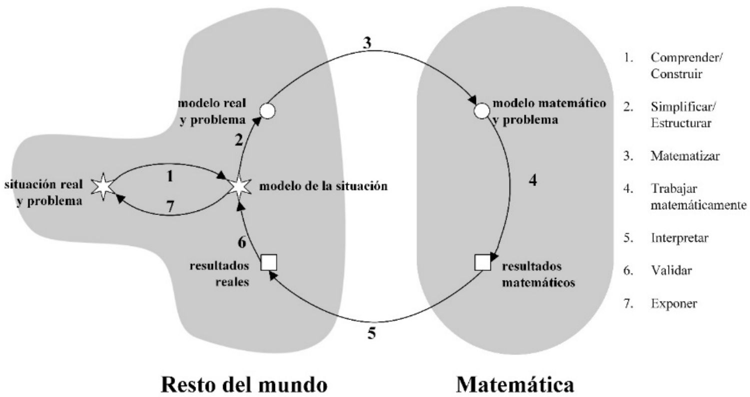

Figura 1 – Ciclo de modelización matemática
Fuente: BLUM; Leiß (2007, p. 225).

Un ejemplo ilustrativo de este ciclo se puede encontrar en Blum y Leiß (2007, p. 225-227). El tránsito entre las fases del ciclo se desarrolla mediante transiciones o, en términos de Maaß (2006), subcompetencias de modelización (numeradas a la derecha de la Figura 1). El trabajo con modelización en el aula se suele desarrollar en pequeños grupos de estudiantes, a

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

quienes se les plantea una situación-problema del mundo real que deben matematizar (Shahbari; Tabach, 2019). Las tareas de modelización involucran un proceso cíclico, con diversos caminos para obtener una solución plausible y coherente con el contexto de la situación planteada (English, 2003). Esta situación, conocida como problema de modelización, debe cumplir con ciertas características consensuadas (Borromeo Ferri, 2018): debe ser *abierta* y *compleja*, en que su resolución no se limite a una respuesta o procedimiento específicos, y donde los estudiantes deban buscar los datos relevantes; debe ser *realista* y *auténtica*, incorporando elementos del mundo real y presentando una situación coherente con un hecho que ha ocurrido o que pueda ocurrir en la realidad (Palm, 2007); finalmente, debe ser un *problema* (Schoenfeld, 1994) que se pueda *resolver a través de un proceso de modelización*, lo que implica el uso de todas las fases que componen un ciclo de modelización.

2.2 Modelización Matemática en la Educación de Profesores

Como se mencionó anteriormente, la literatura en Didáctica de la Matemática de las últimas décadas ha abordado ampliamente la enseñanza y aprendizaje de la modelización en la educación de profesores.

En el contexto austríaco, Kuntze, Siller y Vogl (2013) estudian las autopercepciones de profesores sobre su *conocimiento del contenido pedagógico* (PCK, por sus siglas en inglés) relacionado con la modelización, considerando tanto el PCK necesario para ayudar a sus estudiantes durante el proceso de modelización en el aula, como lo que piensan sobre su propio desarrollo profesional a nivel universitario. Los resultados evidenciaron una necesidad de un desarrollo profesional que no sólo abarque el PCK sobre modelización, sino también la enseñanza de estrategias para la autoeficacia pedagógica de los profesores al implementar este proceso, por ejemplo, utilizando herramientas tecnológicas.

En esta misma línea de investigación, un estudio más reciente lo reportan Greefrath y colaboradores (2022) en el contexto alemán, quienes plantean la creación de problemas propios como una estrategia para desarrollar la competencia en modelización en futuros profesores. En el contexto estadounidense, Manouchehri (2017) reporta los esfuerzos por asistir a un grupo de profesores de matemática en servicio para desarrollar conocimientos sobre modelización y su implementación en el currículo escolar. En este estudio se reportan los resultados de 25 de los 85 profesores que participaron de un curso de desarrollo profesional, evidenciando un crecimiento en su conocimiento sobre modelización a partir de los desafíos matemáticos (construcción y trabajo con el modelo matemático), pedagógicos (estrategias para desarrollar este proceso en el aula), y epistemológicos (obstáculos durante el proceso de modelización) que debieron enfrentar en su práctica docente.

Estudios más recientes han ampliado la mirada sobre el rol de la modelización en la educación de profesores, añadiendo herramientas y procesos matemáticos complementarios. Por ejemplo, Albarracín y Ärlebäck (2022) caracterizan las posibles resoluciones a un problema de Fermi a partir de los Esquemas de Resolución de Problemas de Fermi (ERPF), concluyendo que los ERPF pueden ser herramientas que ayuden a los profesores de matemática en el diseño de tareas que promuevan los procesos de resolución de problemas y modelización. En esta misma línea de problemas, Ferrando y colaboradores (2017) analizan los modelos matemáticos que emergen de la resolución de Problemas de Estimación de Grandes Cantidades, como herramientas para introducir la modelización en educación secundaria.

Otra línea de desarrollo reciente es aquélla que integra a la modelización como parte importante de la Educación STEAM. En este contexto, Wiegand y Borromeo Ferri (2023) desarrollan un enfoque integrado para trabajar STEAM con la Educación para un Desarrollo Sostenible, utilizando a la modelización como medio para lograr esta integración. Estas autoras analizan el trabajo desarrollado en un seminario de educación de futuros profesores de educación secundaria, donde enfatizan en el rol de la modelización, discuten sobre las condiciones de entrada (currículo nacional, educadores, y educandos), su influencia en las competencias, objetivos, y contenidos educativos, y cómo este proceso puede contribuir a la Educación para un Desarrollo Sostenible.

Si bien en estos estudios se dan orientaciones para la inclusión de la modelización en la educación de profesores de matemática, junto con la importancia de este proceso para el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos, este artículo se centra en la reflexión que realizaron futuros profesores en sus propuestas didácticas durante sus prácticas educativas, utilizando una herramienta que proporciona criterios para reflexionar sobre la mejora de la enseñanza y que, hasta ahora, no ha sido ampliamente aplicada al proceso de modelización.

2.3 Criterios de Idoneidad Didáctica

En la Didáctica de la Matemática, diferentes investigadores han hecho intentos de compilar criterios para guiar la práctica del profesor de matemática para que sea de calidad (véase Hill; Ball; Schilling, 2008; Praetorius; Charalambous, 2018; Prediger *et al*., 2022; entre otros). El Enfoque Ontosemiótico (EOS) es uno de los marcos teóricos que ha desarrollado esta

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

línea de investigación, definiendo la noción de idoneidad didáctica (Godino, 2013). Se entiende la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje como el grado en que éste (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (óptimo o adecuado) para conseguir la adaptación entre los *significados personales* logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los *significados institucionales* pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno).

Este constructo multidimensional se descompone en seis criterios de idoneidad didáctica (CID), cada uno de los cuales cuenta con sus respectivos componentes, y su operatividad exige definir un conjunto de indicadores observables, que permiten valorar el grado de idoneidad de cada una de las facetas del proceso de enseñanza y aprendizaje. En el Cuadro 1 se presentan los componentes de los CID con los códigos utilizados en esta investigación para rotularlos, con base en la pauta de Breda, Pino-Fan y Font (2017).

Criterios	Descripción	Componentes
Epistémico	Para valorar si la matemática que se enseña es una *buena matemática*.	– Errores (IE1). – Ambigüedades (IE2). – Riqueza de procesos (IE3). – Representatividad de la complejidad del objeto matemático (IE4).
Cognitivo	Para valorar, antes de iniciar el proceso de enseñanza y aprendizaje, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los estudiantes; y después, si los estudiantes aprendieron lo que se pretendía.	– Conocimientos previos (IC1). – Adaptación curricular a las diferencias individuales (IC2). – Aprendizaje (IC3). – Alta demanda cognitiva (IC4).
Interaccional	Para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los estudiantes.	– Interacción docente–discente (II1). – Interacción entre discentes (II2). – Autonomía (II3). – Evaluación formativa (II4).
Mediacional	Para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de enseñanza y aprendizaje.	– Recursos materiales (IM1). – Número de estudiantes, horario, y condiciones del aula (IM2). – Tiempo (IM3).
Afectivo	Para valorar la implicación (interés, motivación) de los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje.	– Intereses y necesidades (IA1). – Actitudes (IA2). – Emociones (IA3).
Ecológico	Para valorar la adecuación del proceso de enseñanza y aprendizaje al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc.	– Adaptación al currículo (IEc1). – Conexiones intra e interdisciplinarias (IEc2). – Utilidad sociolaboral (IEc3). – Innovación didáctica (IEc4).

Cuadro 1 – Criterios de idoneidad didáctica y sus componentes
Fuente: Breda, Pino-Fan y Font (2017).

Los CID representan una rúbrica (con criterios, componentes, e indicadores) para ayudar a los profesores de matemática a valorar su práctica y guiar un rediseño para la mejora. Sin embargo, los CID son muy diferentes a las guías docentes, cuyo propósito es ayudar a los profesores a dar forma a los procesos de enseñanza y aprendizaje, guiando su acción y toma de decisiones (Remillard, 2018), como aquéllas que acompañan a los textos escolares. A modo de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

ejemplo, cuando se enseñan los CID a los futuros profesores en el programa de máster en que se contextualiza este estudio, se destaca la importancia de desarrollar una actividad matemática rica en procesos matemáticos (como resolución de problemas, modelización, argumentación, etc.), de manera que se espera logren incluir la mayoría o, al menos, algunos de estos procesos en sus unidades didácticas.

Del mismo modo, se explica que esta actividad matemática requiere que las tareas/problemas propuestos tengan una alta demanda cognitiva, tomando como sustento teórico el trabajo de investigadores en Didáctica de la Matemática que realzan este aspecto (por ejemplo, Stein; Smith, 1998). Por lo tanto, se espera que los futuros profesores incluyan, entre otros, el proceso de modelización en sus unidades didácticas con tareas/problemas que promuevan una alta demanda cognitiva y que, también, como consecuencia de su reflexión, otorguen un peso especial en su propuesta de rediseño a aquellos procesos menos desarrollados. Además, desde la perspectiva de los CID, los componentes *Riqueza de procesos* (del *criterio epistémico*) y *Alta demanda cognitiva* (del *criterio cognitivo*), dos de los aspectos que los futuros profesores deben valorar de su unidad didáctica implementada, reafirman la importancia de incluir procesos relevantes de la actividad matemática.

Los CID son ampliamente utilizados como herramienta teórico-metodológica con diversas finalidades. En primer lugar, para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos diseñados, implementados, y rediseñados por profesores con la finalidad de conseguir una mejora en la enseñanza de la matemática (por ejemplo, Breda, 2020; Morales-López; Font, 2019; Sousa *et al*., 2020; entre otros). En segundo lugar, para organizar la reflexión de profesores, en formación o en servicio, sobre su propia práctica en programas de formación inicial o continua (por ejemplo, Esqué; Breda, 2021; García-Marimón *et al.*, 2021; Giacomone; Godino; Beltrán-Pellicer, 2018; entre otros), con la finalidad de estructurar, de forma sistemática, la reflexión de los profesores sobre la complejidad de los objetos matemáticos que enseñan y los factores implicados en su estudio. Finalmente, para analizar y valorar las lecciones incluidas en los libros de texto (por ejemplo, Burgos *et al*., 2020).

El marco teórico del EOS, del cual emergen los CID, aporta herramientas para el análisis, tanto de la actividad matemática subyacente al proceso de modelización (véase Ledezma; Font; Sala, 2023), como de los conocimientos y competencias del profesor de matemática para desarrollar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos (véase Pino-Fan; Castro; Font, 2023). Finalmente, en el EOS se considera que potenciar la modelización es un aspecto que mejora la idoneidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos (Ledezma; Sol *et al.*, 2022).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

3 Metodología

En este estudio se siguió una metodología de investigación cualitativa de tipo naturalista (pues no se interfirió en el contexto de investigación) desde un paradigma interpretativo (Cohen; Manion; Morrison, 2018), que consiste en un análisis de contenido (Schreier, 2012). En esta sección se explican los aspectos metodológicos del estudio.

3.1 Contexto de la Investigación

Esta investigación se desarrolló en el contexto del Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato (especialidad de matemática), impartido por las universidades públicas de Cataluña (España), durante el año académico 2020–2021.

El programa de estudios del Máster incluye, en el módulo *Complementos de Formación Disciplinar*, un submódulo sobre modelización. Este submódulo consta de cuatro sesiones (una por semana) y su metodología, principalmente expositiva, es la siguiente: en la primera sesión se introduce a los futuros profesores en lo que se entiende por modelización y se les presenta el ciclo propuesto por Blum y Leiß (2007); durante la segunda y tercera sesión se presentan una serie de ejemplos de problemas de modelización y los futuros profesores deben resolver algunos de éstos en clases; en la cuarta sesión, los futuros profesores deben exponer la tarea final del submódulo frente al curso. Esta tarea consiste en presentar un problema de modelización que incluya el enunciado y la resolución del problema, y la ubicación curricular de los contenidos matemáticos necesarios para su resolución.

Este programa también prescribe, en el módulo *Prácticas*, la realización de prácticas educativas en colaboración con las instituciones establecidas mediante convenios con las universidades, y que se encuentren reconocidas como centros de prácticas. El periodo de prácticas consta de dos fases: una de observación (durante dos semanas de noviembre) y otra de intervención (durante seis semanas desde febrero), ambas desarrolladas bajo la supervisión de un profesor mentor del centro de prácticas. En la fase de intervención, los futuros profesores deben implementar una unidad didáctica que diseñaron previamente, la cual está determinada por el centro de prácticas, el nivel educativo de los estudiantes, y el momento del año escolar en que realicen su intervención. Dada esta situación, si bien se espera que los futuros profesores puedan incluir la modelización, entre otros procesos matemáticos, en la implementación de su unidad didáctica, el margen que tienen para hacerlo está condicionado por los factores antes mencionados, no así en el rediseño que propongan en sus TFMs.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

Debido al contexto de la pandemia por COVID-19, los futuros profesores del curso 2020–2021 implementaron sus unidades didácticas durante la transición entre los contextos virtual y presencial de enseñanza, por lo que se encontraban expuestos a situaciones como: cierre temporal de los centros educativos y retorno a la enseñanza virtual, a causa de la detección de casos positivos de contagio; formato híbrido de enseñanza (virtual y presencial), para así cumplir con el aforo permitido de estudiantes en sala; formato presencial con grupos reducidos de estudiantes.

3.2 Estructura de un Trabajo Final de Máster

Para la obtención del grado de Máster en Formación del Profesorado de Matemática en Educación Secundaria y Bachillerato, los futuros profesores deben elaborar un TFM, el cual debe ser un trabajo original, autónomo, e individual. Para su elaboración se presentan los CID a los futuros profesores, junto con la versión modificada de la pauta de componentes y descriptores de dichos criterios que permite aplicarlos (véase Breda; Pino-Fan; Font, 2017). Con estas herramientas, se les sugiere que valoren en sus TFMs la unidad didáctica que implementaron para que, de este modo, propongan cambios que puedan ayudar a mejorar la idoneidad del proceso de enseñanza y aprendizaje. En el Cuadro 2**Cuadro 2** se describen los cinco capítulos que estructuran un TFM.

Capítulos	Descripción
Introducción	Presentación del contexto del centro educativo en que se realizó la práctica y los aspectos curriculares de la unidad didáctica implementada.
Análisis de la implementación	Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de enseñanza y aprendizaje implementado, utilizando los CID como herramienta de reflexión sobre la propia práctica. Este capítulo finaliza con la valoración global de la idoneidad didáctica, mediante un gráfico radial de forma hexagonal que se construye a partir de las valoraciones asignadas a cada CID (véase un ejemplo en Ledezma; Breda; Sánchez, 2021, p. 237).
Propuesta de rediseño	Propuesta de una reformulación de la unidad didáctica para mejorar su idoneidad didáctica, con base en la reflexión realizada en el capítulo anterior.
Autoevaluación competencial	Autoevaluación de cada competencia de la propuesta de Font y colaboradores (**Erro! Fonte de referência não encontrada.**), y comparación entre el nivel que cada futuro profesor tenía al comenzar el Máster con el que alcanzó al culminar su proceso educativo.
Anexos	Puede incluir las evidencias de la implementación, la planificación de la unidad didáctica implementada, las referencias citadas, entre otros elementos.

Cuadro 2 – Capítulos que estructuran un TFM
Fuente: elaborado por los autores.

Aunque un TFM es más que sólo una reflexión escrita sobre la propia práctica educativa, el nivel de habilidades de investigación requeridas es menor que para elaborar una tesis de máster orientada a la investigación. Si bien se alienta a los futuros profesores a justificar las

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

mejoras de sus unidades didácticas rediseñadas con los resultados de investigaciones en Didáctica de la Matemática sobre el tema desarrollado en sus prácticas educativas, en general, se citan pocas referencias en los TFMs.

3.3 Análisis de Contenido

Para este estudio se consideraron 117 TFMs elaborados durante el año académico 2020–2021 y, para su análisis cualitativo, se siguieron unos *pasos* similares a los utilizados por Sánchez (2021), que se describen a continuación.

En un *primer paso*, de acuerdo con la literatura especializada y el conocimiento de los autores en el tema, se elaboró una lista de palabras clave relacionadas con la modelización (*context*, *model*, *problema*, *real*) para buscar en los TFMs. Estos términos permitieron identificar las referencias sobre modelización en los comentarios valorativos realizados por los futuros profesores en sus TFMs.

En un *segundo paso* se registraron los datos (autor, título, nivel educativo, contenido matemático) de cada TFM. La organización de los contenidos matemáticos se realizó con base en las directrices curriculares para educación secundaria (Departament d'Educació, **Erro! Fonte de referência não encontrada.**) y bachillerato (Departament d'Ensenyament, **Erro! Fonte de referência não encontrada.**) de Cataluña, los cuales se agruparon en siete áreas temáticas: Álgebra, Estadística, Funciones, Geometría, Números, Probabilidades, y Trigonometría. Este *segundo paso* permitió contar con una base de datos ordenada para consultar los TFMs y, de este modo, llevar un primer registro de cuáles incluyeron las palabras clave definidas en el *primer paso*.

Al revisar la base de datos elaborada en el *segundo paso*, se pudo observar una regularidad en la distribución de las palabras clave dentro de los TFMs. Es decir, se encontraron TFMs que no incluían las palabras clave; TFMs que incluían las palabras clave, principalmente, en los capítulos *Análisis de la implementación* y/o *Propuesta de rediseño*; y TFMs que incluían las palabras clave a lo largo de todo el documento. Dada esta situación se decidió, en un *tercer paso*, clasificar los TFMs de acuerdo con cuatro niveles de referencia a la modelización que se pudieron identificar en estos documentos, como se describe en el Cuadro 3.

Niveles	Descripción
Nivel 0 (N_0)	Incluye los TFMs que no hicieron referencia a los términos relacionados con la modelización, es decir, que no consideraron el trabajo con este proceso en las unidades didácticas implementadas, o que incluyeron algunas de las palabras clave establecidas, pero sin relacionarse directamente con la modelización.
Nivel 1 (N_1)	Incluye los TFMs que, aunque no consideraron el trabajo con modelización en las unidades

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

Niveles	Descripción
	didácticas implementadas, sí plantearon su inclusión en la propuesta de rediseño. Concretamente, en N_1 se incluyeron los TFMs que sólo contenían comentarios sobre modelización en el capítulo *Propuesta de rediseño*.
Nivel 2 (N_2)	Incluye los TFMs que plantearon problemas de modelización en las unidades didácticas implementadas, a la vez que reflexionaron sobre la implementación de estos problemas, pero que no propusieron mejoras en su rediseño para potenciar este proceso. Concretamente, en N_2 se incluyeron los TFMs que sólo contenían comentarios valorativos sobre modelización (utilizando los CID) en el capítulo *Análisis de la implementación*, pero que no propusieron cambios concretos para mejorar este proceso en el capítulo *Propuesta de rediseño*.
Nivel 3 (N_3)	Incluye los TFMs similares a los clasificados en N_2, pero que sí plantearon mejoras en su rediseño para potenciar la modelización. Concretamente, en N_3 se incluyeron los TFMs que contenían comentarios valorativos sobre modelización (utilizando los CID) en el capítulo *Análisis de la implementación*, y que también propusieron cambios concretos (además de comentarios) para mejorar este proceso en el capítulo *Propuesta de rediseño*.

Cuadro 3 – Niveles de referencia a la modelización matemática
Fuente: elaborado por los autores.

Durante este *tercer paso*, una vez establecidos los cuatro niveles de referencia a la modelización en el Cuadro 3, los autores realizaron una triangulación de la siguiente manera: primero, cada autor clasificó los TFMs según estos niveles; segundo, se compararon las clasificaciones realizadas por cada autor, logrando un porcentaje de acuerdo del 98% entre los tres; finalmente, se discutieron las diferencias de clasificación y se logró un consenso, dada la experiencia de los autores en este tipo de análisis.

En un *cuarto paso* se categorizaron los comentarios referidos a la modelización utilizando los CID. Diversos estudios han abordado el tema de la reflexión docente en los procesos de educación de profesores de matemática – por ejemplo, Breda (2020), desde el análisis didáctico; Hidalgo-Moncada, Díez-Palomar y Vanegas (2023), desde el aprendizaje autorregulado; Sánchez, Font y Breda (2022), desde el desarrollo de la creatividad; entre otros – utilizando una metodología de análisis de contenido para evidenciar el uso de los componentes de los CID. En esta investigación, estos componentes se consideraron como categorías apriorísticas (Schreier, 2012), para así identificar los aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje que los futuros profesores relacionaron con la modelización. Para efectos del análisis de contenido de los TFMs, en este *cuarto paso* se consideraron los comentarios valorativos del capítulo *Análisis de la implementación* de los documentos clasificados en los niveles N_2 y N_3, puesto que son los que contienen reflexiones de los futuros profesores sobre modelización en su implementación. Debido al acuerdo alcanzado por los autores durante el *tercer paso*, este *cuarto paso* se condujo sin discrepancias, ya que es un hecho objetivo que la valoración de un determinado componente de los CID en cada TFM contenga (o no) un comentario valorativo sobre modelización.

En el Cuadro 4 se ejemplifica cómo se aplicaron los cuatro *pasos* del análisis de contenido a los TFMs #004, #035, #062, y #100. La elección de estos cuatro TFMs se justifica

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

en que cada uno fue clasificado en un nivel distinto de referencia a la modelización.

Análisis de contenido	**Contenido analizado**
	TFM #004
Primer paso	No se identificaron las palabras clave en el documento.
Segundo paso	Es una propuesta didáctica para la enseñanza de la medida en el primer curso de educación secundaria (estudiantes de 12–13 años).
Tercer paso	No se identificaron comentarios valorativos sobre modelización ni referencias a las palabras clave definidas. Por lo tanto, este TFM se clasificó en N_0.
Cuarto paso	–
	TFM #035
Primer paso	Se identificaron las palabras clave *modelizar* y *problemas*.
Segundo paso	Es una propuesta didáctica para la enseñanza de la geometría vectorial en el segundo curso de bachillerato (estudiantes de 17–18 años).
Tercer paso	No se encontraron comentarios valorativos sobre modelización (usando los CID) dentro del capítulo *Análisis de la implementación*. Se encontró el siguiente comentario dentro del capítulo *Propuesta de rediseño*: "Con esto pretendo que los alumnos profundicen en su autonomía, sean capaces de modelizar los problemas en el lenguaje matemático, y/o hagan representaciones matemáticas" (p. 24). Por lo tanto, este TFM se clasificó en N_1.
Cuarto paso	–
	TFM #062
Primer paso	Se identificaron las palabras clave *modelizar*, *contexto*, y *real*.
Segundo paso	Es una propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones en el tercer curso de educación secundaria (estudiantes de 14–15 años).
Tercer paso	Se encontraron comentarios sobre modelización en la valoración de los CID dentro del capítulo *Análisis de la implementación*. No se encontraron comentarios para mejorar el trabajo con modelización en el capítulo *Propuesta de rediseño*. Por lo tanto, este TFM se clasificó en N_2.
Cuarto paso	Entre otros, se encontró el siguiente comentario dentro de la valoración del componente IEc2: "las actividades realizadas requerían entender e interpretar un problema en un contexto real, demostrando la utilidad en la vida diaria" (p. 24).
	TFM #100
Primer paso	Se identificaron las palabras clave *modelización* y *contexto*.
Segundo paso	Es una propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones en el cuarto curso de educación secundaria (estudiantes de 15–16 años).
Tercer paso	Se encontraron comentarios sobre modelización en la valoración de los CID dentro del capítulo *Análisis de la implementación*. Se encontró una propuesta de nuevos problemas de modelización dentro del capítulo *Propuesta de rediseño*. Por lo tanto, este TFM se clasificó en N_3.
Cuarto paso	Entre muchos otros, se encontró el siguiente comentario en la valoración del componente IC4: "Respecto a la activación de procesos cognitivos relevantes, […], las diferentes actividades de la unidad se han propuesto para trabajar ciertos procesos matemáticos complejos, como los cambios de representación, […], la modelización, la argumentación, […], etc." (p. 10). También, se encontró el siguiente comentario dentro de la valoración del componente IM1: "Finalmente, en cuanto a los recursos manipulativos, éstos estuvieron presentes en la actividad final de modelización, donde se aprovecharon los termómetros electrónicos del instituto para tomar datos de temperatura de diferentes objetos y realizar la tabla de valores" (p. 14).

Cuadro 4 – Ejemplos de análisis de contenido con los TFMs #004, #035, #062, y #100
Fuente: elaborado por los autores.

Con respecto al *cuarto paso* del análisis de contenido, se considera importante aclarar que un TFM puede incluir más de una frase/oración con referencias a los términos relacionados con la modelización dentro de la valoración de un componente específico de los CID. Por ejemplo, en la valoración del componente *Riqueza de procesos* (IE3) se pudieron encontrar las definiciones de los procesos *modelización* y *resolución de problemas* distribuidas, ya sea en

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

dos celdas dentro de una tabla, en dos oraciones distintas dentro de un mismo párrafo, o en dos párrafos disjuntos dentro de la valoración de este componente. A raíz de esta situación, se decidió considerar como *un comentario* al conjunto de estas frases/oraciones que incluyeron términos relacionados con la modelización en la valoración de cada CID.

4 Presentación y Análisis de Resultados

En esta sección se presentan (subsecciones 4.1 y 4.2) y analizan (subsecciones 4.3 y 4.4) los principales resultados del análisis de contenido realizado sobre los TFMs.

4.1 Clasificación de los TFMs según los Niveles de Referencia a la Modelización

A partir de la búsqueda de palabras clave en los 117 TFMs (*primer paso* del análisis de contenido), un primer resultado es que se encontraron términos afines con la modelización en 87 de estos TFMs. Luego de registrar cada TFM (*segundo paso* del análisis de contenido) se procedió a su clasificación según los niveles de referencia a la modelización (*tercer paso* del análisis de contenido), y así se obtuvieron los resultados presentados en la Tabla 1.

Tabla 1 – Número de TFMs según los niveles de referencia a la modelización matemática

Niveles de referencia	Número de TFMs	Porcentajes*
N_0	30	25,6%
N_1	47	40,2%
N_2	24	20,5%
N_3	16	13,7%
Total	**117**	**100%**

Nota (*): Porcentajes redondeados a la primera cifra decimal
Fuente: elaborada por los autores.

La Tabla 1 presenta una noción sobre el uso de los términos afines con la modelización en los TFMs analizados y la importancia que los futuros profesores le dieron a este proceso dentro de sus unidades didácticas. En este sentido, 30 TFMs no incluyeron referencias directamente relacionadas con la modelización (TFMs clasificados en N_0), y 47 TFMs, si bien no incluyeron este proceso en las unidades didácticas implementadas, sí lo consideraron para sus propuestas de rediseño (TFMs clasificados en N_1). Estos 77 TFMs no fueron considerados en los análisis posteriores, ya que no se encontraban en consonancia con los objetivos de este estudio.

De este modo, un segundo resultado es que 40 de los 117 TFMs contenían la reflexión de los futuros profesores sobre la implementación de la modelización en sus unidades didácticas (correspondientes a los niveles de referencia N_2 y N_3). Los resultados que se presentan en la

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

siguiente subsección (*cuarto paso* del análisis de contenido) incluyen el análisis de estos 40 TFMs.

4.2 Clasificación de los Comentarios de los TFMs según los Componentes de los CID

A partir de la clasificación presentada en la Tabla 1 (*tercer paso* del análisis de contenido), se procedió a categorizar los comentarios valorativos relacionados con la modelización de acuerdo con el componente de los CID sobre el que los futuros profesores reflexionaron cuando hicieron el comentario (*cuarto paso* del análisis de contenido). De este modo, se obtuvieron los resultados presentados en la Tabla 2.

Tabla 2 – Número de comentarios en cada componente de los CID

Componente	Nro. de comentarios	Componente	Nro. de comentarios	Componente	Nro. de comentarios	Componente	Nro. de comentarios	Componente	Nro. de comentarios	Componente	Nro. de comentarios
IE1	0	IC1	4	II1	0	IM1	8	IA1	23	IEc1	3
IE2	2	IC2	2	II2	3	IM2	0	IA2	1	IEc2	13
IE3	38	IC3	4	II3	3	IM3	1	IA3	0	IEc3	17
IE4	8	IC4	10	II4	1					IEc4	7
Total	**48**	**Total**	**20**	**Total**	**7**	**Total**	**9**	**Total**	**24**	**Total**	**40**

Nota: se utilizaron los códigos de los componentes de los CID del Cuadro 1
Fuente: elaborada por los autores.

A partir de la categorización de la Tabla 2 (*cuarto paso* del análisis de contenido) se tienen dos resultados. En primer lugar, se identificaron 148 comentarios referidos explícita o implícitamente a la modelización en los 40 TFMs considerados en este análisis. Sobre este aspecto, no se considera relevante atribuir un número fijo de comentarios identificados a cada TFM ya que, por ejemplo, un documento podía incluir comentarios relacionados con la modelización en diez componentes de los CID diferentes y otro podía incluir comentarios en sólo tres componentes. Dado que este tipo de refinamiento de datos no aportaba riqueza al estudio, ha sido excluido de los análisis realizados. En segundo lugar, en cuanto a los CID privilegiados en la reflexión de los futuros profesores, se identificó una mayor concentración de comentarios en el *criterio epistémico*, seguido por el *criterio ecológico*. Estos resultados se analizan en las dos subsecciones siguientes.

4.3 Sobre los TFMs con Referencias a la Modelización Matemática

A partir de la base de datos generada en el *segundo paso*, y de la clasificación de los

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

comentarios realizada en el *tercer paso*, en la Tabla 3 se presentan: (a) los contenidos matemáticos abordados por las unidades didácticas de los TFMs; (b) el número de TFMs que implementaron la modelización, según el contenido matemático y el nivel educativo en que se desarrollaron las prácticas educativas; (c) el número de TFMs que no implementaron este proceso; y (d) el total de unidades didácticas para cada contenido matemático.

Tabla 3 – Contenidos matemáticos y niveles educativos en que se implementó (o no) la modelización

Contenidos matemáticos	Educación Secundaria				Bachillerato		S/impl.	Totales
	1°	2°	3°	4°	1°	2°		
Álgebra	1	2	2	3			14	22
Estadística					1		9	10
Funciones			6	3	1		6	16
Geometría	1	4	6				26	37
Números	1				1		13	15
Probabilidades			1	1			2	4
Trigonometría				6			7	13
Totales	3	6	15	13	3		77	117

Nota: S/impl. = Sin implementación de la modelización
Fuente: elaborada por los autores.

Como se mencionó en la subsección 3.1, entre los factores determinantes para el desarrollo de las prácticas educativas se encuentra el nivel educativo de los estudiantes y el momento del año escolar en que los futuros profesores realicen su intervención en las instituciones educativas; es decir, ambos factores determinaron el contenido matemático de las unidades didácticas y su elección no dependía de los futuros profesores. Sobre el nivel educativo de los estudiantes, la Tabla 3 muestra que, en casi todos los niveles educativos, en mayor o menor medida, los futuros profesores implementaron la modelización en sus unidades didácticas, centrándose en los cursos 3° (estudiantes de 14–15 años) y 4° (estudiantes de 15–16 años) de educación secundaria. Sobre el momento del año escolar, en el contexto de este estudio, las prácticas educativas se desarrollaron durante seis semanas desde febrero de 2021 (periodo febrero–abril, aproximadamente).

La Tabla 3 también muestra que los contenidos matemáticos más utilizados para implementar la modelización, en casi igual número, fueron Geometría y Funciones, seguidos por Álgebra y Trigonometría. Sobre el contenido Geometría es evidente que, en comparación con el número total de unidades didácticas que lo abordaron (37), menos de un tercio de éstas (11) implementó la modelización para su enseñanza. Este resultado se condice, parcialmente, con los hallazgos de Girnat y Eichler (2011), en el sentido que los profesores tienden a no considerar la enseñanza de la geometría como un contenido ligado a la modelización. Por el contrario, se evidenció una tendencia a utilizar la modelización para la enseñanza del contenido Funciones por parte de los futuros profesores. Concretamente, en comparación con el número

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

total de unidades didácticas que abordaron este contenido (16), en alrededor de dos tercios de éstas (10) se implementó la modelización. Este resultado se condice con la postura de Michelsen (2006), quien destaca el rol de las funciones como una herramienta para desarrollar la modelización en el aula.

4.4 Sobre los Comentarios Valorativos acerca de la Modelización Matemática

El *cuarto paso* del análisis de contenido evidenció los componentes de los CID en que los futuros profesores hicieron explícitas sus reflexiones sobre la implementación de la modelización mediante comentarios evaluativos. Como se mencionó en la subsección 3.2, los futuros profesores valoran la idoneidad didáctica del proceso de enseñanza y aprendizaje implementado en el capítulo *Análisis de la implementación* del TFM, utilizando para ello los CID. Más específicamente, los futuros profesores realizan comentarios valorativos en cada componente de los CID, en donde reflexionan, entre otros aspectos, sobre la implementación de la modelización en sus unidades didácticas. De este modo, se identificó que los 40 TFMs (véase los niveles N_3 y N_4 en la Tabla 1) que incluyeron la modelización en sus unidades didácticas concentraron el mayor número de comentarios en los *criterios epistémico* y *ecológico*. En esta subsección se analizan estos comentarios valorativos, pues son evidencia de la reflexión de los futuros profesores sobre la implementación de la modelización en sus unidades didácticas.

En el *criterio epistémico* se encuentra el componente *Riqueza de procesos*[1] (IE3), el cual fue el que reunió el mayor número de comentarios sobre modelización. Esto se debió a que fue el componente donde se definieron y ejemplificaron los procesos trabajados durante la unidad didáctica implementada. Un aspecto que llama la atención en la valoración de este componente es la diversidad de definiciones sobre este proceso que se encontraron en los TFMs analizados, como se muestra en el Cuadro 5 con tres ejemplos representativos.

TFM	Definición o comentario
#010	Modelización (matematización horizontal de Freudenthal, 1991): usar representaciones matemáticas para modelizar e interpretar situaciones (p. 9).
#026	Razonamiento y prueba (dimensión) – Modelar (proceso): Traducir la realidad en un modelo matemático y viceversa. Muchos de los problemas que hemos realizado son modelizaciones (p. 8).
#039	Representar y modelar: Incluye estructurar la situación que se ha de modelar; traducir la "realidad" en una estructura matemática; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar y plantear críticas a un modelo y sus resultados (p. 10).

Cuadro 5 – Definiciones de modelización matemática encontradas en los TFMs #010, #026, y #039
Fuente: elaborado por los autores.

[1] La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes de la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.) (Breda; Pino-Fan; Font, 2017).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

El TFM #010[2] es representativo de una situación minoritaria de algunos documentos, en que se utilizó un referente teórico concreto para justificar la inclusión de la modelización en la unidad didáctica como, en este caso, la *matematización horizontal* de Freudenthal (1991). Este concepto se define como la traducción del lenguaje natural al matemático (matematización) que "va desde el mundo de la *vida* al mundo de los *símbolos*" (Freudenthal, 1991, p. 41, traducción de los autores). No obstante, la anexión de un referente teórico adicional para justificar la inclusión de la modelización no tuvo mayor influencia en los análisis de las implementaciones de las unidades didácticas.

También el TFM #026 es representativo de otra situación común, en que se comentó sobre la modelización como si este proceso consistiera sólo en la traducción de un enunciado desde el lenguaje natural a una representación matemática, lo cual sugiere una doble interpretación. Por una parte, que algunos futuros profesores tendieron a reducir el proceso de modelización a la idea de *matematización horizontal* de Freudenthal (1991), sin considerar las demás fases del ciclo de modelización. De acuerdo con la clasificación propuesta por Maaß (2010), este tipo de tareas se puede considerar como aquéllas enfocadas sólo en el desarrollo de la subcompetencia de matematización (véase Figura 1, nro. 3), pero no en el desarrollo del proceso de modelización en su totalidad. Por otra parte, se interpreta que algunos futuros profesores tendieron a superponer el proceso de modelización con el tratamiento y conversión de registros de representación semiótica (en términos de Duval, 2017) de los objetos matemáticos involucrados en este tipo de problemas.

Finalmente, el TFM #039 es representativo de otra situación común, en que se aportaron definiciones más detalladas del proceso de modelización (similar a la de Geiger *et al*., 2018), pero sin citar la fuente desde donde se extrajo la definición. Esto se debe a que, dado que un TFM no se orienta a la investigación, sino a la reflexión sobre la propia práctica, los futuros profesores no siempre cumplen con las normas de citado o de elaboración de una lista de referencias en sus trabajos.

En el *criterio ecológico* se encuentran los componentes *Conexiones intra e interdisciplinarias*[3] (IEc2) y *Utilidad sociolaboral*[4] (IEc3), los cuales también reunieron varios comentarios sobre modelización. Esto se debió a que los futuros profesores tendieron a

[2] Véase un análisis en extenso del TFM #010 en Ledezma, Breda y Sánchez (2021).
[3] Los contenidos enseñados se relacionan con otros temas matemáticos (más avanzados o del mismo nivel educativo), o bien con contenidos de otras disciplinas (contexto extra-matemático o de otras asignaturas del mismo nivel educativo) (Breda; Pino-Fan; Font, 2017).
[4] Los contenidos son útiles para la inserción sociolaboral (Breda; Pino-Fan; Font, 2017).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

superponer el contenido de las valoraciones de ambos componentes cuando se refirieron a dotar de utilidad a la matemática en un contexto extramatemático. En este sentido, los comentarios apuntaron hacia la modelización como una herramienta para relacionar la matemática, tanto con los contenidos curriculares de otras asignaturas (especialmente, física, y biología) como con el contexto de los estudiantes (problemas de su entorno sociolaboral). Por ejemplo, se encontraron los siguientes comentarios en las valoraciones de ambos componentes:

> *A lo largo de la UD [Unidad Didáctica] se ha intentado conectar las actividades con las matemáticas y otras disciplinas; las actividades realizadas propiciaban entender e interpretar un problema en un contexto real, demostrando la utilidad [de la matemática] en la vida diaria.* (valoración del componente IEc2; TFM #062, 2021, p. 24).

> *Con la actividad L3, donde el alumnado tenía que calcular la tarifa telefónica más justa, se intentó fomentar una matemática crítica, que sirviese para resolver problemas reales. Ahora bien, al final se les pidió que reflexionaran sobre si era tan sencillo como lo habían modelizado o si había otros factores para tener en cuenta (tarifas de datos, SMS, segundas líneas…), y si todo era cuantificable de forma universal (¿cuánto estamos dispuestos a pagar por tener una buena cobertura?, ¿y por una buena atención al cliente?) […]. La mayoría del alumnado respondió positivamente a la reflexión de esta actividad, proponiendo muchos aspectos para tener en cuenta.* (valoración del componente IEc3; TFM #075, 2021, p. 17).

Si bien los *criterios epistémico* y *ecológico* concentraron la mayor cantidad de comentarios relacionados con la modelización, también se debe hacer una mención especial a los *criterios afectivo* y *cognitivo*, que se ubicaron en un segundo plano.

En el *criterio afectivo* se encuentra el componente *Intereses y necesidades*[5] (IA1), donde los comentarios destacaron que los problemas de modelización, al estar *contextualizados* y ser *realistas*, captaron (o intentaron captar) la atención de los estudiantes, debido a que algunos de éstos aprovecharon el contexto del COVID-19 como tema central de sus enunciados. Por ejemplo, se encontraron los siguientes comentarios en la valoración de este componente:

> *Las actividades propuestas durante la unidad didáctica estaban pensadas para motivar al alumnado y despertar su interés, ya que buscaban trabajar las matemáticas en contextos reales, para que le encontraran utilidad tanto en la vida cotidiana como en el mundo profesional. Sin embargo, considero que podría haber contextualizado más algunas de las actividades o proponerlas más enfocadas en aplicaciones reales, o para una realidad de adolescentes de 14–15 año.* (TFM #054, 2021, p. 22).

> *Algunas de las actividades incluidas, como "Modelización de la pandemia" […], tenían una relación directa con la realidad inmediata de los estudiantes. Creemos que eso los ayudó a establecer relaciones entre los conceptos trabajados y la vida cotidiana* (TFM #094, 2021, p. 14).

[5] La selección de tareas es de interés para los estudiantes y se proponen situaciones que permiten valorar la utilidad de la matemática en la vida cotidiana y profesional (Breda; Pino-Fan; Font, 2017).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

En el *criterio cognitivo* se encuentra el componente *Alta demanda cognitiva*[6] (IC4), donde los comentarios destacaron que los problemas de modelización implementados posibilitaron trabajar otros procesos relevantes de la actividad matemática. Por ejemplo, se encontraron los siguientes comentarios en la valoración de este componente:

> *La demanda cognitiva, sin embargo, va condicionada por la vertebración de la unidad didáctica con problemas basados en procesos de modelización. Es en estos problemas donde la demanda cognitiva al estudiante es más alta. [...]. Más allá de la conversión, los problemas de modelización permiten proponer al estudiante resolver situaciones concretas, de forma que tienen que plantear diferentes situaciones o tesis y comprobarlas a partir del modelo (argumentación matemática). [...]. También es importante notar que en el proceso de modelización se tiene un primer par de generalización y abstracción al construir y expresar el modelo, pero también un ejercicio de concreción cuando deben interpretarse los resultados matemáticos para sacar conclusiones en el contexto del problema (contextualización). [...]. Es entonces, gracias a los problemas de modelización, que se puede presentar esta riqueza de matices en la definición de la función y poder ejemplificar por qué sirve tenerlos en cuenta. Este proceso requiere una demanda cognitiva alta* (TFM #033, 2021, p. 9-10).

> *La exigencia en cuanto a procesos cognitivos y de razonamiento de esta secuencia didáctica está directamente relacionada, sobre todo, con el ámbito de la resolución de problemas. En este sentido, toma especial importancia el concepto de modelización* (TFM #041, 2021, p. 14).

Dentro de la valoración del componente IC4, el autor del TFM #033 se refirió al siguiente problema de modelización como ejemplo de tarea con una alta demanda cognitiva:

> *Imagina que quieres ir de tu casa a la playa más cercana para pasar el fin de semana. Mira qué distancia separa tu casa de esa playa y anótala, adjuntando una captura de pantalla o fotografía del mapa que te permitió medir la distancia. Suponiendo que te encuentras con retenciones en la carretera que duran tres horas, ¿cuál es el consumo de combustible para que vayas de tu casa a la playa y cuánto dinero te costará?* (TFM #033, 2021, p. 79).

El enunciado anterior corresponde al rediseño de una tarea de modelización contextualizada en el consumo de combustible de un automóvil durante un viaje familiar a la playa, dentro de una propuesta interdisciplinaria entre matemática y física. Si bien los estudiantes contaban con las fórmulas de consumo de combustible en diferentes contextos (consumo estándar, en ralentí, y en movimiento), este enunciado se caracteriza por ser *abierto* y *complejo*, dado que requiere que los estudiantes formulen sus propios datos para poder resolver la tarea; también, es *realista* y *auténtico*, pues la apertura del problema permite que la información se adecúe al contexto de cada estudiante, con variables como el precio por litro de combustible en su ciudad, los datos de consumo del vehículo familiar, la distancia desde su hogar hasta una playa de libre elección. Dado que este enunciado se condice con las características mencionadas en la subsección 2.1, se puede considerar como un *problema* que

[6] Se activan procesos cognitivos relevantes en la actividad matemática (generalización, conexiones intramatemáticas, cambios de representación, conjeturas, etc.) y se promueven procesos metacognitivos (Breda; Pino-Fan; Font, 2017).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

es *solucionable mediante un ciclo de modelización*.

Finalmente, los *criterios interaccional* y *mediacional* fueron los que menos comentarios incluyeron sobre modelización. Debido a las medidas sanitarias de distanciamiento social y aforo limitado de las salas de clase, los futuros profesores comentaron que no privilegiaron el trabajo colaborativo entre sus estudiantes, como se sugiere para las actividades de modelización (véase subsección 2.1) lo que, claramente, afectó al *criterio interaccional*. Los escasos comentarios valorativos en este *criterio* apuntaron, principalmente, a que las actividades de modelización propiciaron un ambiente de interacción entre los estudiantes (componente *Interacción entre discentes*[7] [II2]) junto con la autonomía de su trabajo (componente *Autonomía*[8] [II3]).

Por su parte, los comentarios sobre modelización encontrados en el *criterio mediacional* se centraron, casi en su totalidad, en la valoración del componente *Recursos materiales*[9] (IM1), en que destacaron el uso de *softwares* de geometría dinámica (GeoGebra, Desmos, Transum, etc.) para el trabajo con modelización. Este último resultado coincide, parcialmente, con los hallazgos de Chan y Leung (2014), quienes destacan el uso del *software* de geometría dinámica para el aprendizaje de la matemática, aunque las reflexiones de los futuros profesores no le atribuyeron un rol más que como un medio de soporte para la modelización.

5 Discusión y Conclusiones

El análisis de contenido realizado a los 117 TFMs del año académico 2020–2021, en el contexto de un programa de máster para la educación de profesores de matemática, permitió evidenciar las decisiones que los futuros profesores tomaron, tanto durante su periodo de prácticas educativas como en las propuestas de mejora derivadas de la reflexión realizada en sus TFMs sobre la inclusión de la modelización en sus unidades didácticas.

El primer aspecto para destacar de estos resultados es que alrededor de un 65% de estos futuros profesores no incluyeron la modelización como un proceso relevante en sus unidades didácticas (véase los niveles N_0 y N_1 en la Tabla 1). Se descarta la explicación de que ellos no

[7] Se favorece el diálogo y la comunicación entre los estudiantes. Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión (Breda; Pino-Fan; Font, 2017).
[8] Se contemplan momentos en que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación, y validación) (Breda; Pino-Fan; Font, 2017).
[9] Uso de materiales manipulativos e informáticos que permitan introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, y argumentaciones, todos éstos adaptados al significado pretendido. Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas, usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones (Breda; Pino-Fan; Font, 2017).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

tenían los conocimientos sobre modelización y su inclusión en el proceso de enseñanza y aprendizaje matemático, dado que el programa de máster en que se contextualiza este estudio dedica un submódulo específicamente a la enseñanza de este proceso (véase subsección 3.1). También, se descarta como explicación el hecho que la pandemia por COVID-19 haya sido un contexto que no propiciara la modelización, pues los medios de comunicación incluyeron información que permitía diseñar tareas/problemas de modelización, así como modelos para representar la evolución de la pandemia, lo cual hizo que la modelización adquiriera un valor social relevante.

No obstante, una explicación plausible es que, en términos de los CID, un profesor debe procurar *a priori* que se cumplan al máximo estos *criterios*; sin embargo, el contexto de implementación le obliga a tomar decisiones sobre qué aspectos debe priorizar, relegar a un segundo plano o, simplemente, omitir. En el caso de este estudio, si bien uno de los indicadores del componente *Riqueza de procesos* da importancia al desarrollo del proceso de modelización en el aula, el retorno a la enseñanza presencial hizo que estos futuros profesores priorizaran otros aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático como, por ejemplo, el sistema de trabajo del centro de prácticas (recuperación de contenidos tras el periodo de confinamientos), el tiempo del que disponían, otros procesos relevantes de la actividad matemática, etc. Estos resultados son coherentes con otras investigaciones que han puesto de manifiesto las dificultades para incluir la modelización en el aula (por ejemplo, Niss, 2001), dada la complejidad de los aspectos que un profesor debe tomar en consideración al implementar una clase.

El segundo aspecto para destacar concierne al casi 35% restante de estos futuros profesores. A pesar de que este programa de máster incluye un submódulo sobre modelización en que se presenta el ciclo propuesto por Blum y Leiß (2007), no se hallaron referencias en los TFMs sobre el uso de este ciclo (ni de ningún otro) para efectuar análisis sobre los problemas implementados o propuestos en el rediseño, y que se consideraron como *problemas de modelización*. Es decir, los futuros profesores afirmaban que habían implementado la modelización en sus unidades didácticas, aunque en sus reflexiones no se apoyaban en un ciclo de modelización para justificar tal afirmación.

Una explicación plausible es que, además del retorno a la enseñanza presencial que se comentó anteriormente, dado que un TFM es un trabajo autónomo, la reflexión sobre la modelización, desde una perspectiva teórica o no, es una decisión que toma el autor del TFM en acuerdo con su tutor y que, seguramente, tiene en consideración, entre otros aspectos, las restricciones de tiempo y número de páginas para su elaboración. Además, como se mencionó

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

en la subsección 3.2, el TFM tiene por finalidad que el futuro profesor reflexione sobre su propia práctica, lo cual no implica, obligatoriamente, una reflexión desde una perspectiva netamente teórica.

El tercer aspecto para destacar es que, con base en la evidencia de los TFMs analizados, para la mayoría de estos futuros profesores, dada una situación matemática o extramatemática, encontrar un objeto matemático del cual la situación sea una instanciación, fue considerado como modelización. En este sentido, este proceso se entendió como la relación entre un objeto matemático general y un caso particular, que pudo ser o no una situación extramatemática. Por otra parte, también hubo casos en los que *modelizar* se consideró como un *cambio de modelo de representación*, en términos semióticos. Una explicación plausible es que, en el programa de máster en que se contextualiza este estudio, no se realizó una reflexión general sobre la noción de proceso matemático, sus diferentes tipos, y las relaciones y diferencias entre ellos, ya que sólo se priorizó un trabajo específico con la modelización y la resolución de problemas en los submódulos respectivos.

Por una parte, esta situación se contradice con la postura de Font y Rubio (2016), quienes justifican la importancia de realizar un trabajo general con los procesos matemáticos y no sobre procesos específicos. Por otra parte, estos resultados se condicen parcialmente con el estudio de Villa-Ochoa (2015), en el sentido que los profesores tienden a plantear enunciados, considerados como *problemas de modelización*, que sólo evalúan las habilidades de los estudiantes para registrar, mediante una expresión simbólica, una relación matemática revestida en un problema verbal relativamente realista. Este aspecto, en particular, refuerza el estudio de Kuntze, Siller y Vogl (2013) en cuanto al énfasis de un desarrollo profesional docente en modelización para mejorar su implementación en el aula.

El cuarto aspecto para destacar es que se evidenció, en el proceso de revisión de la reflexión que hicieron los futuros profesores, que sus tutores no les hicieron darse cuenta de que, para afirmar que se implementó el proceso de modelización en una unidad didáctica, como mínimo, es necesario que el problema planteado a los estudiantes cumpla con las características descritas en la subsección 2.1, como el caso del problema presentado en la subsección 4.4. Esta debilidad en la retroalimentación se manifestó, por ejemplo, en algunos TFMs que adoptaron una definición de modelización más cercana a la de matematización (como el caso del TFM #026 en el Cuadro 5), donde los futuros profesores declararon que habían implementado la modelización al plantear problemas de este tipo que no son de modelización como tal. Por lo tanto, el proceso de retroalimentación para elaborar un TFM sería un aspecto que el programa de máster donde se desarrolló este estudio podría mejorar, teniendo en cuenta los resultados de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

esta investigación.

Finalmente, se encontraron algunos TFMs en que los futuros profesores debieron reducir la duración de los tiempos destinados para una actividad de modelización e, incluso, eliminar algunas sesiones. Esto se debió, en gran parte, a limitantes puestas por los centros de prácticas, como la recuperación de contenidos no abordados durante el periodo de confinamiento, recomendaciones de los profesores mentores sobre la complejidad de estos problemas, o actividades extracurriculares. Un ejemplo paradigmático de esta situación fue el TFM #033, donde el futuro profesor tenía previsto desarrollar una actividad de modelización durante una hora de taller práctico, pero que debió desplazar para otra sesión de su unidad didáctica y, además, reducir su calidad matemática por recomendaciones de su profesora mentora[10].

En términos de los CID, este quinto aspecto guarda cierta relación con el primero que se destacó, con la diferencia que aquí los futuros profesores sí consideraron *a priori* la inclusión de la modelización en sus unidades didácticas. Sin embargo, dado que al final este proceso se suprimió o redujo a su mínima expresión, esta importancia de la modelización puede haber sido menor que otros aspectos como, por ejemplo, explicar los contenidos conceptuales que estaban previstos en el currículo.

Retomando la pregunta de investigación sobre qué aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje relacionaron futuros profesores de educación secundaria y bachillerato con la modelización matemática en sus reflexiones sobre su inclusión durante la transición entre los contextos virtual y presencial de enseñanza, la principal conclusión es que ellos relacionaron los aspectos *epistémico* y *ecológico* (y, en menor medida, el *cognitivo* y el *afectivo*) al trabajo con este proceso en el contexto de este estudio.

En términos generales, los resultados de este estudio evidenciaron que el retorno a la enseñanza presencial influyó, principalmente, en dos aspectos sobre estos futuros profesores. Por una parte, el COVID-19 aportó un contexto realista y auténtico para plantear tareas/problemas de modelización cercanos a los estudiantes; aunque, por otra parte, representó un cambio a nivel mundial en la forma de retomar los procesos de enseñanza y aprendizaje (Engelbrecht; Borba; Kaiser, 2023) afectando, por ejemplo, la interacción de los estudiantes. En otras palabras, estos resultados muestran cómo los futuros profesores debieron decidir a qué criterios y componentes de los CID dar mayor o menor relevancia al momento de implementar sus clases, forzados por el retorno a la enseñanza presencial.

[10] Véase un análisis detallado de este TFM en Ledezma, Sol *et al.* (2022).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

Si bien los futuros profesores que incluyeron la modelización en sus unidades didácticas comentaron sobre los desafíos, sobre todo pedagógicos, para implementar este proceso en el aula, similares a los reportados por Manouchehri (2017), sí valoraron positivamente la inclusión de modelización, utilizando argumentos similares a los que se suelen dar en la literatura para justificar su inclusión en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos (véase Blum, 2011). Finalmente se destaca, como una contribución de este estudio, la aplicación de una herramienta que estructura, de forma sistemática, la reflexión de los profesores sobre su práctica educativa, como son los CID, al caso específico del proceso de modelización, sentando las bases para una pauta de *criterios*, *componentes*, e *indicadores* específicos para trabajar la modelización en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos (véase un avance en Ledezma; Font *et al*., 2022).

Agradecimientos

Esta investigación se desarrolló dentro los Proyectos N.º 72200458 y 72200072 financiados por ANID/PFCHA (Chile); y del Proyecto PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por "FEDER Una manera de hacer Europa".

Referencias

ABASSIAN, A.; SAFI, F.; BUSH, S.; BOSTIC, J. Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. **Investigations in Mathematics Learning**, Greensboro, v. 12, n. 1, p. 53-65. 2020.

ALBARRACÍN, L.; ÄRLEBÄCK, J. B. Esquemas de resolución de problemas de Fermi como herramienta de diseño y gestión para el profesor. **Educación Matemática**, Guadalajara, v. 34, n. 2, p. 289-309, ago. 2022.

BLOMHØJ, M. Mathematical modelling: A theory for practice. En: CLARKE, B. *et al*. (ed.). **International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics**. Gotemburgo: National Center for Mathematics Education, 2004. p. 145-159.

BLUM, W. Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. En: KAISER, G.; BLUM, W.; BORROMEO FERRI, R.; STILLMAN, G. (ed.). **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling:** ICTMA 14. Dordrecht: Springer, 2011. p. 15-30.

BLUM, W.; BORROMEO FERRI, R. Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, v. 1, n. 1, p. 45–58, dic. 2009.

BLUM, W.; LEIß, D. How do students and teachers deal with modelling problems? En: HAINES, C.; GALBRAITH, P.; BLUM, W.; KHAN, S. (ed.). **Mathematical Modelling (ICTMA 12):** Education, Engineering and Economics. Chichester: Horwood, 2007. p. 222-231.

BORROMEO FERRI, R. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

process. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, Berlín, v. 38, n. 2, p. 86-95, abr. 2006.

BORROMEO FERRI, R. Mathematical modelling in European education. **Journal of Mathematics Education at Teachers College**, Nueva York, v. 4, n. 2, p. 18-24, nov. 2013.

BORROMEO FERRI, R. **Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education**. Cham: Springer, 2018. 163 p.

BREDA, A. Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. **Bolema**, Río Claro, v. 34, n. 66, p. 69-88, ene./abr. 2020.

BREDA, A.; PINO-FAN, L.; FONT, V. Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. **Eurasia:** Journal of Mathematics Science and Technology Education, Eastbourne, v. 13, n. 6, p. 1893-1918, jun. 2017.

BURGOS, M.; CASTILLO, M. J.; BELTRÁN-PELLICER, P.; GIACOMONE, B.; GODINO, J. D. Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. **Bolema**, Río Claro, v. 34, n. 66, p. 40-68, ene./abr. 2020.

CHAN, K. K.; LEUNG, S. W. Dynamic geometry software improves mathematical achievement: Systematic review and meta-analysis. **Journal of Educational Computing Research**, Thousand Oaks, v. 51, n. 3, p. 311-325, oct. 2014.

COHEN, L.; MANION, L.; MORRISON, K. **Research Methods in Education**. 8. ed. Nueva York: Routledge, 2018. 945 p.

DEPARTAMENT D'EDUCACIÓ. **Currículum Educació Secundària Obligatòria**. Barcelona: Generalitat de Catalunya, 2019. 412 p.

DEPARTAMENT D'ENSENYAMENT. **Currículum Batxillerat**. Barcelona: Generalitat de Catalunya, 2008. 410 p.

DUVAL, R. **Understanding the Mathematical Way of Thinking** – The Registers of Semiotic Representations. Cham: Springer, 2017. 133 p.

ENGELBRECHT, J.; BORBA, M. C.; KAISER, G. Will we ever teach mathematics again in the way we used to before the pandemic? **ZDM – Mathematics Education**, Berlín, v. 55, n. 1, p. 1-16, ene. 2023.

ENGLISH, L. Mathematical modelling with young learners. En: LAMON, S. J.; PARKER, W. A.; HOUSTON, K. (ed.). **Mathematical Modelling:** A Way of Life – ICTMA 11. Chichester: Horwood, 2003. p. 3-17.

ESQUÉ; D.; BREDA, A. Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad, utilizando la herramienta idoneidad didáctica. **Uniciencia**, Heredia, v. 35, n. 1, p. 38-54, ene./jun. 2021.

FERRANDO, I.; ALBARRACÍN, L.; GALLART, C.; GARCÍA-RAFFI, L.; GORGORIÓ, N. Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de Fermi. **Bolema**, Río Claro, v. 31, n. 57, p. 220-242, abr. 2017.

FONT, V. *et al*. Competencias del profesor y competencias del profesor de matemáticas. Una propuesta. En: FONT, V. *et al*. (ed.). **Competencias del Profesor de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato**. Barcelona: Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, 2012. p. 59-68.

FONT, V.; RUBIO, N. Procesos en matemáticas: Una perspectiva ontosemiótica. **La Matematica e la**

sua Didattica, Boloña, v. 24, n. 1-2, p. 97–123, jun./dic. 2016.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education:** China Lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. 209 p.

GARCÍA-MARIMÓN, O.; DIEZ-PALOMAR, J.; MORALES-MAURE, L.; DURÁN-GONZÁLEZ, R. E. Evaluación de secuencias de aprendizaje de matemáticas usando la herramienta criterios de idoneidad didáctica. **Bolema**, Río Claro, v. 35, n. 70, p. 1047-1072, ago. 2021.

GEIGER, V. *et al.* An interdisciplinary approach to designing online learning: Fostering pre-service mathematics teachers' capabilities in mathematical modelling. **ZDM – Mathematics Education**, Berlín, v. 50, n. 1-2, p. 217-232, abr. 2018.

GIACOMONE, B.; GODINO, J. D.; BELTRÁN-PELLICER, P. Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 44, n. e172011, p. 1-21. 2018.

GIRNAT, B.; EICHLER, A. Secondary teachers' beliefs on modelling in geometry and stochastics. En: KAISER, G.; BLUM, W.; BORROMEO FERRI, R.; STILLMAN, G. (ed.). **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling:** ICTMA 14. Dordrecht: Springer, 2011. p. 75-84.

GODINO, J. D. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, San Pedro de Montes de Oca, v. 8, n. 11, p. 111-132, dic. 2013.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM – Mathematics Education**, Berlín, v. 39, n. 1–2, p. 127-135, mar. 2007.

GREEFRATH, G.; SILLER, H.-S.; KLOCK, H.; WESS, R. Pre-service secondary teachers' pedagogical content knowledge for the teaching of mathematical modelling. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 109, n. 2, p. 383-407, feb. 2022.

HIDALGO-MONCADA, D.; DÍEZ-PALOMAR, J.; VANEGAS, Y. Prácticas de autorregulación en la propuesta didáctica de un futuro profesor de matemáticas: Un instrumento para la reflexión. **PARADIGMA**, Maracay, v. XLIV, n. 2, p. 112-146, jun. 2023.

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHILLING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 39, n. 4, p. 372-400, jul. 2008.

KAISER, G. Mathematical modelling and applications in education. En: LERMAN, S. (ed.). **Encyclopedia of Mathematics Education**. 2. ed. Cham: Springer, 2020. p. 553-561.

KUNTZE, S.; SILLER, H.-S.; VOGL, C. Teachers' self-perceptions of their pedagogical content knowledge related to modelling – An empirical study with Austrian teachers. En: STILLMAN, G. A.; KAISER, G.; BLUM, W.; BROWN, J. P. (ed.). **Teaching Mathematical Modelling:** Connecting to Research and Practice. Dordrecht: Springer, 2013. p. 317-326.

LEDEZMA, C.; BREDA, A.; SÁNCHEZ, A. Reflexão de uma futura professora sobre o ensino de álgebra através da modelagem matemática. **INTERMATHS**, Vitória da Conquista, v. 2, n. 2, p. 227-244, dic. 2021.

LEDEZMA, C.; FONT, V.; SALA, G. Analysing the mathematical activity in a modelling process from the cognitive and onto-semiotic perspectives. **Mathematics Education Research Journal**, Sídney, v. 35, n. 4, p. 715-741, dic. 2023.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

LEDEZMA, C.; FONT, V.; SALA-SEBASTIÀ, G.; BREDA, A. Principios de la modelización matemática desde la perspectiva de la idoneidad didáctica. En: BLANCO, T. F.; NÚÑEZ-GARCÍA, C.; CAÑADAS, M. C.; GONZÁLEZ-CALERO, J. A. (ed.). **Investigación en Educación Matemática XXV**. Santiago de Compostela: SEIEM, 2022. p. 345-354.

LEDEZMA, C.; SOL, T.; SALA-SEBASTIÀ, G.; FONT, V. Knowledge and beliefs on mathematical modelling inferred in the argumentation of a prospective teacher when reflecting on the incorporation of this process in his lessons. **Mathematics**, Basilea, v. 10, n. 18, n. 3339, sept. 2022.

MAAß, K. What are modelling competencies? **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, Berlín, v. 38, n. 2, p. 113-142, abr. 2006.

MAAß, K. Modelling in class: What do we want the students to learn? En: HAINES, C.; GALBRAITH, P.; BLUM, W.; KHAN, S. (ed.). **Mathematical Modelling (ICTMA 12):** Education, Engineering and Economics. Chichester: Horwood, 2007. p. 63-78.

MAAß, K. Classification scheme for modelling tasks. **Journal für Mathematik-Didaktik**, Berlín, v. 31, n. 2, p. 285-311, oct. 2010.

MAASS, K. *et al*. Mathematical modelling – A key to citizenship education. En: BUCHHOLTZ, N.; SCHWARZ, B.; VORHÖLTER, K. (ed.). **Initiationen mathematikdidaktischer Forschung:** Festschrift zum 70. Geburtstag von Gabriele Kaiser. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2022. p. 31-50.

MANOUCHEHRI, A. Implementing mathematical modelling: The challenge of teacher educating. En: STILLMAN, G.; BLUM, W.; KAISER, G. (ed.). **Mathematical Modelling and Applications:** Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education. Cham: Springer, 2017. p. 421-432.

MICHELSEN, C. Functions: A modelling tool in mathematics and science. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, Berlín, v. 38, n. 3, p. 269-280, jun. 2006.

MORALES-LÓPEZ, Y.; FONT, V. Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 45, n. e189468, abr. 2019.

NISS, M. Issues and problems of research on the teaching and learning of applications and modelling. En: MATOS, J. F.; BLUM, W.; HOUSTON, K.; CARREIRA, S. P. (ed.). **Modelling and Mathematics Education:** ICTMA 9 – Applications in Science and Technology. Chichester: Horwood, 2001. p. 72-88.

NISS, M.; HØJGAARD, T. Mathematical competencies revisited. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 102, n. 1, p. 9-28, sept. 2019.

ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT – OECD. **PISA 2018 Assessment and Analytical Framework**. París: OECD Publishing, 2019.

PALM, T. Features and impact of the authenticity of applied mathematical school tasks. En: BLUM, W.; GALBRAITH, P. L.; HENN, H.-W.; NISS, M. (ed.). **Modelling and Applications in Mathematics Education:** The 14th ICMI Study. Boston: Springer, 2007. p. 201-208.

PINO-FAN, L. R.; CASTRO, W. F.; FONT, V. A macro tool to characterize and develop key competencies for the mathematics teacher's practice. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwán, v. 21, n. 5, p. 1407-1432, jun. 2023.

PRAETORIUS, A.-K.; CHARALAMBOUS, C. Y. Classroom observation frameworks for studying instructional quality: Looking back and looking forward. **ZDM – Mathematics Education**, Berlín, v.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230170

50, n. 3, p. 535-553, jun. 2018.

PREDIGER, S.; GÖTZE, D.; HOLZÄPFEL, L.; RÖSKEN-WINTER, B.; SELTER, C. Five principles for high-quality mathematics teaching: Combining normative, epistemological, empirical, and pragmatic perspectives for specifying the content of professional development. **Frontiers in Education**, Lausana, v. 7, n. 969212, oct. 2022.

REMILLARD, A. Examining teachers' interactions with curriculum resource to uncover pedagogical design capacity. En: FAN, L.; TROUCHE, L.; QI, C.; REZAT, S.; VISNOVSKA, J. (ed.). **Research on Mathematics Textbooks and Teachers' Resources:** Advances and Issues. Cham: Springer, 2018. p. 69-88.

SÁNCHEZ, A. **Perspectivas de los Futuros Profesores de Matemáticas de Educación Secundaria sobre la Creatividad y su Desarrollo en las Clases**. 2021. 506 f. Tesis (Doctorado en Didáctica de las Ciencias, las Lenguas, las Artes y las Humanidades) – Facultad de Educación, Universidad de Barcelona, Barcelona, 2021. Disponible en: <https://hdl.handle.net/2445/187046>. Acceso en: 16 feb. 2024.

SÁNCHEZ, A.; FONT, V.; BREDA, A. Significance of creativity and its development in mathematics classes for preservice teachers who are not trained to develop students' creativity. **Mathematics Education Research Journal**, Sídney, v. 34, n. 4, p. 863-885, dic. 2022.

SCHOENFELD, A. H. Reflections on doing and teaching mathematics. En: SCHOENFELD, A. H. (ed.). **Mathematical Thinking and Problem Solving**. Hillsdale: Erlbaum, 1994. p. 53–70.

SCHREIER, M. **Qualitative Content Analysis in Practice**. Thousand Oaks: SAGE, 2012. 283 p.

SHAHBARI, J. A.; TABACH, M. Adopting the modelling cycle for representing prospective and practising teachers' interpretations of students' modelling activities. En: STILLMAN, G. A.; BROWN, J. P. (ed.). **Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education**. Cham: Springer, 2019. p. 179-196.

SOUSA, J. R.; GUSMÃO, T. C. R.; FONT, V.; LANDO, J. C. Task (re)design to enhance the didactic-mathematical knowledge of teachers. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 22, n. 4, p. 98-120, jul./ago. 2020.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, Reston, v. 3, n. 4, p. 268-275, ene. 1998.

VILLA-OCHOA, J. A. Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: Un estudio de caso con profesores de matemáticas. **Magis:** Revista Internacional de Investigación en Educación, Bogotá, v. 8, n. 16, p. 133-148, oct. 2015.

WIEGAND, S.; BORROMEO FERRI, R. Promoting pre-service teachers' professionalism in steam education and education for sustainable development through mathematical modelling activities. **ZDM – Mathematics Education**, Berlín, v. 55, n. 7, p. 1269-1282, dic. 2023.

Submetido em 31 de Julho de 2023.
Aprovado em 01 de Setembro de 2023.